

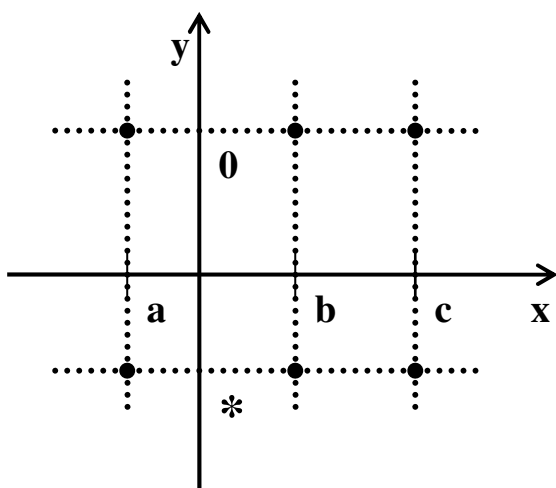
§11. Kartézský součin

Pozn.: Uspořádanou dvojicí prvků $[x,y]$ rozumíme dvojice prvků, u nichž záleží na pořadí.
Platí: $[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Def.: Kartézským součinem množin A, B nazýváme množinu $A \times B$ všech uspořádaných dvojic $[a,b]$ takových, že $a \in A, b \in B$.
 $A \times B = \{[a,b] : a \in A \wedge b \in B\}$

- Pozn.:** a) Kartézský součin $A \times A$ zapisujeme A^2 a nazýváme druhou kartézskou mocninou množiny A nebo kartézským čtvercem množiny A .
b) Jsou-li množiny A, B konečné, je počet prvků množiny $A \times B$ (označíme jej $m(A \times B)$) také konečný a platí: $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$, kde $m(A), m(B)$ je počet prvků množiny $A(B)$.
c) Kartézský součin obecně není komutativní: $A \times B \neq B \times A$.
d) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Pozn.: Kartézský součin $A \times B$ lze znázorňovat graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic – mluvíme o kartézském grafu: prvky množiny A nanášíme na osu x , prvky množiny B na osu y . Kartézským grafem z minulého příkladu je množina bodů.



§12. Binární relace a jejich grafy

Pozn.: Výroková forma $V(x,y)$ se dvěma neznámými $x \in A, y \in B$ je zápis, který se po dosazení konstant na místa proměnných x, y stává výrokem.
Protože dosazujeme uspořádané dvojice $[x,y] \in A \times B$, platí, že definiční obor i obor pravdivosti výrokové formy $V(x,y)$ jsou množiny uspořádaných dvojic.

Def.: Necht' A, B jsou 2 množiny. Pak každou podmnožinou $M \subseteq A \times B$ nazýváme binární relaci mezi množinami A, B (v tomto pořadí).
Je-li speciálně $A=B$, pak relace $M \subseteq A^2$ se nazývá (binární) relací v množině A .

Pozn.: Relace, která neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici prvků, se nazývá prázdná relace a označuje se $\emptyset$. Platí: $\forall A, B : \emptyset \subseteq A \times B$.
Relace $U = A \times B$ se nazývá univerzální relace.

Pozn.: Binární relace budeme někdy nazývat jen relace.

Pozn.: Způsoby zadání binární relace:

a) výčtem prvků (pouze konečné relace)

např. $A = \{1,2,3\}; B = \{a,b\}; M = \{[1,a],[1,b]\}$

b) jako obor pravdivosti výrokové formy $V(x,y)$ s definičním oborem D

např. $A = B = R; M_1 = \{[x,y] \in R^2 : y \leq x\}$

$A = B = E_2$ ($E_2 \dots$ množina všech bodů v rovině);

$M_2 = \{[x,y] \in E_2^2 : |xy| = 1\}$

$A = \check{Z}$ (množina žáků), $B = U$ (množina učebnic); $M_3 = \{[\check{z},u] \in \check{Z} \times U : \text{žák } \check{z} \text{ je majitelem učebnice } u\}$

Obecný zápis: $M = \{[x,y] \in A \times B : V(x,y)\}$

Pozn.: Protože relace jsou definovány jako jisté množiny, má smysl s nimi provádět množinové operace (průnik, sjednocení, doplněk,...).

Pozn.: Grafickým vyjádřením binární relace je u konečných množin množina bodů.

Def.: Výrokovou formu tvaru $ax+by+c=0$, kde $x,y \in R$ jsou neznámé a $a,b,c \in R; [a,b] \neq [0,0]$ jsou koeficienty, nazýváme lineární rovnicí se dvěma neznámými x, y .

Řešením rovnice se 2 neznámými je množina všech uspořádaných dvojic $[x_0, y_0] \in R^2$, které po dosazení za neznámé (v příslušném pořadí) převádí výrokovou formu $V(x,y)$ v pravdivý výrok.

Pozn.: Je-li $[a,b] \neq [0,0]$, pak grafickým znázorněním množiny (grafem) $L = \{[x,y] \in R^2 : ax+by+c=0\}$ je přímka.

Je-li $[a,b] = [0,0]$, pak zřejmě platí: a) $c = 0 \Rightarrow L = R^2 = E_2$ (množina všech bodů v rovině)

b) $c \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

Pozn.: V zájmu stručného vyjadřování budeme v dalším množinu L ztotožňovat s jejím grafickým obrazem.

Def.: Výrokovou formu tvaru $ax+by+c > 0$

($ax+by+c \geq 0; ax+by+c < 0; ax+by+c \leq 0$) nazýváme lineární nerovnicí se 2 neznámými $x, y \in R$ a s koeficienty $a,b,c \in R; [a,b] \neq [0,0]$.

Pozn.: Je-li $[a,b] \neq [0,0]$, je grafem lineární nerovnice s 2 neznámými $L = \{[x,y] \in R^2 : ax+by+c > 0\}$ polorovina s hraniční přímkou $ax+by+c = 0$.

§13. Systém lineárních rovnic

Pozn.: V tomto paragrafu se budeme zabývat lineárními rovnicemi s n neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$. Je tedy nutno rozšířit pojem kartézského součinu na součin n množin:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, jehož prvky jsou uspořádané n -tice:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] : x_i \in A_i \text{ pro } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Zpravidla budeme pracovat se součinem $R \times R \times \dots \times R = R^n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] : x_i \in R \text{ pro } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.

n -ární relace je pak každá podmnožina tohoto kartézského součinu.

Def.: Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in R$. Výrokovou formu tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ s neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ a koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme lineární rovnicí s n neznámými. Číslo $b \in R$ nazýváme absolutním členem této rovnice.

Řešením rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ nazýváme každou uspořádanou n -tici $[p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^n$, jestliže výrok $a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n = b$ je pravdivý.

Def.: Systém rovnic

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad (*)$$

kde $m, n \in N; a_{ij} \in R, b_i \in R; i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme systémem (soustavou) m lineárních rovnic o n neznámých.

Číslo a_{ij} nazýváme koeficientem v i -té rovnici u j -té neznámé, b_i absolutním členem i -té rovnice.

Řešením systému (*) nazýváme každou uspořádanou n -tici $[p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^n$ takovou, že po dosazení p_j za x_j přecházejí všechny rovnice (*) v pravdivé výroky.

Def.: Systém (*) se nazývá řešitelný (resp. neřešitelný), jestliže existuje (resp. neexistuje) alespoň jedno jeho řešení.

Dva systémy lineárních rovnic o n neznámých se nazývají ekvivalentní, jestliže množiny jejich řešení jsou si rovny.

Jakoukoli úpravu daného systému, po níž vznikne systém ekvivalentní původnímu, nazýváme ekvivalentní úpravou systému.

Pozn.: Úlohou dalších paragrafů bude nalezení a vyšetřování všech řešení daného systému lineárních rovnic (budeme zkracovat SLR).

Přitom mohou nastat tyto 3 případy:

- (*) nemá žádné řešení – je neřešitelný
- (*) má právě jedno řešení

- c) (*) má více než jedno řešení, pak v množině R^n jich má nekonečně mnoho. V tomto případě se snažíme nalézt jednoduchý předpis, pomocí něhož lze vypsát libovolné řešení tohoto systému.

§14. Matice

Def.: Necht' $m, n \in N$. (Reálnou) maticí typu m/n nazýváme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ kde } a_{ij} \in R, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Označení: $A = (a_{ij})$ typu m/n .

Čísla a_{ij} nazýváme prvky matice.

Uspořádanou n -tici čísel $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ nazýváme i -tým řádkem matice A ,

uspořádanou m -tici čísel $[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]$ nazýváme j -tým sloupcem matice A .

Je-li $m=n$, pak hovoříme o čtvercové matici řádu n .

Def.: Dvě matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ se rovnají, jestliže jsou téhož typu a platí: $a_{ij} = b_{ij}$ pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}; \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Matice 0_{mn} se nazývá nulová, jestliže všechny její prvky jsou rovny 0.

Def.: Necht' $A = (a_{ij})$ je nenulová matice typu m/n . Řekneme, že matice A je ve schodovitém tvaru, jestliže každý její následující řádek začíná větším počtem nul než předchozí.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{mj_n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pozn.: První řádek matice ve schodovitém tvaru může, ale nemusí začínat nulami.

Def.: Počet nenulových řádků matice A ve schodovitém tvaru se nazývá hodnota matice A a označuje se $h(A)$.

Pozn.: Každou nenulovou matici lze převést pomocí tzv. řádkových elementárních transformací na schodovitý tvar.

Mezi řádkové elementární transformace řadíme následující úpravy:

1. záměna 2 řádků
2. vynásobení řádku nenulovým číslem
3. k danému řádku přičtení jiného řádku, vynásobeného libovolným nenulovým číslem

Matice B vzniklá z matice A řádkovými elementárními transformacemi se nazývá ekvivalentní s maticí A . Zapisujeme $A \sim B$.

Provedení těchto transformací nemění hodnota matice: $h(A) = h(B)$.

§15. Gaussova eliminační metoda

Def.: Necht' je dán systém lineárních rovnic

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} (*)$$

Pak matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, resp. $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$

nazýváme maticí systému (*), resp. rozšířenou maticí systému (*).

V.15.1.: Necht' (*) je systém lineárních rovnic. Pak následující úpravy jsou ekvivalentními úpravami tohoto systému:

1. záměna 2 rovnic
2. vynásobení celé rovnice nenulovým reálným číslem
3. přičtení libovolného násobku (s výjimkou 0) jedné rovnice k jiné rovnici

Pozn.: Je vidět, že uvedené úpravy odpovídají řádkovým elementárním transformacím rozšířené matice systému (*) $\bar{A}$.

Pozn.: Gaussova eliminace je metoda, při níž užitím řádkových elementárních transformací převádíme $\bar{A}$ na schodovitý tvar, přičemž zřejmě platí:

Necht' matice B je ekvivalentní s maticí $\bar{A}$ ve schodovitém tvaru. Necht' v posledním řádku matice B je prvních n nul a v $n+1$ -ím sloupci je nenulové číslo. Pak systém (*) nemá řešení. V opačném případě pak systém (*) má alespoň jedno řešení.

V.15.2.: Kronecker-Capelliho věta (Frobeniova věta):

Necht' (*) je systém m lineárních rovnic o n neznámých. Necht' A (resp. $\bar{A}$) je matice (resp. rozšířená matice) systému (*). Pak platí:

systém (*) je řešitelný $\Leftrightarrow h(A) = h(\bar{A})$

[Dk. – náznak:

1. „ $\Rightarrow$ “: sporem: Necht' (*) je řešitelný a $h(A) \neq h(\bar{A})$. Necht' tedy $h(A) < h(\bar{A})$. Pak ve schodovitém tvaru matice $\bar{A}$ je poslední nenulový řádek tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 | a), a \in R, a \neq 0 \Rightarrow (*)$ nemá řešení – spor.
2. „ $\Leftarrow$ “: sporem: Necht' $h(A) = h(\bar{A})$ a (*) nemá řešení. Pak poslední řádek matice $\bar{A}$ ve schodovitém tvaru je tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 | a), a \in R - \{0\} \Rightarrow h(A) < h(\bar{A})$ – spor.]

Pozn.: Z V.15.2 plyne jednoduché kritérium toho, zda (*) má nebo nemá řešení. Tato věta však nic neříká o tom, jak v případě, že (*) je řešitelný, stanovit počet řešení a jak řešení nalézt. K tomu užíváme Gaussovy eliminace – viz následující příklady:

V.15.3.: Necht' (*) je řešitelný systém m rovnic o n neznámých. Pak platí:

1. systém (*) má právě jedno řešení $\Leftrightarrow h(A) = n$ ((A je regulární))
2. systém (*) má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$ ((A je singulární))

Pozn.: Jestliže má systém (*) nekonečně mnoho řešení, pak můžeme libovolně volit některé neznámé – tzv. volné neznámé. Ostatní neznámé pak vyjádříme pomocí nich.

Pozn.: Jestliže má systém (*) právě jedno řešení, je často vhodné převést matici systému $\bar{A}$ do tzv. diagonálního tvaru – mluvíme pak o diagonální matici řádu n :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Jestliže prvky matice $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, mluvíme o tzv. jednotkové matici řádu n :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array} \right)$$

Zde prvky $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou přímo kořeny systému (*) $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Diagonální, resp. jednotkovou matici získáme Gaussovou eliminací.

Def.: Systém rovnic

$$\left. \begin{array}{cccc|c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} (\Delta)$$

nazýváme homogenním systémem m lineárních rovnic o n neznámých.

V.15.4.: 1. Systém (Δ) má vždy alespoň jedno řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, tzv. nulové řešení.

2. Toto nulové řešení je jediné $\Leftrightarrow h(A) = n$.

3. Systém (Δ) má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$.

§16. Determinanty, Cramerovo pravidlo

Pozn.: Je dán systém $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-a_{21}) \\ \cdot a_{11} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{array} \right)$$

$$\text{Nechť } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 &= b_1 - a_{12} \cdot \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{21}a_{12} - b_2a_{12}a_{11} + b_1a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \\ &= \frac{a_{11}(b_1a_{22} - b_2a_{12})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

Def.: Nechť $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu 2.

Determinantem matice A nazýváme reálné číslo $|A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Označení: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$



Pozn.: Platí: $b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = |A_1|$, $b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{21} \\ b_1 & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = |A_2|$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Def.: a) Nechť $A = (a_{11})$ je matice řádu 1.

Determinantem matice A nazýváme reálné číslo $|A| = a_{11}$.

b) Nechť $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu 3.

Determinantem matice A nazýváme reálné číslo

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Pozn.: Pro výpočet determinantu matice řádu 3 používáme tzv. Sarrusovo pravidlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



Pozn.: Analogicky bychom mohli zavést pojem determinant matic vyšších řádů.

V.16.1.: Vlastnosti determinantů, věty o počítání s determinanty:

Nechť $|A|$ je determinant čtvercové matice řádu n . Pak platí:

- a) Necht' 1 řádek matice A je nulový. Pak $|A| = 0$.
- b) Necht' matice B vznikne z matice A záměnou 2 řádků. Pak $|B| = -|A|$.
- c) Necht' matice B vznikne z matice A vynásobením 1 řádku číslem $r \in R$. Pak $|B| = r \cdot |A|$.
- d) Necht' v matici A jsou 2 řádky shodné. Pak $|A| = 0$.
- e) Necht' matice B vznikne z matice A tak, že k 1 řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku. Pak $|B| = |A|$.

[Dk.: pro $n = 2$]

Pozn.: V.16.1. v lze analogicky formulovat pro změny sloupců.

Pozn.: Nyní si ukážeme jednoduchý způsob výpočtu determinantů vyšších řádů:

$$\text{Necht' } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ je determinant řádu } \underline{n}.$$

Gaussovou eliminací a využitím V.16.1. e) dostaneme na místech prvků $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ samé nuly.

$$\text{Nyní platí: } |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \text{ tento determinant je řádu } n-1.$$

Postup takto opakujeme, až získáme determinant řádu 3, resp. 2, který už umíme jednoduše řešit.

Uvedená metoda je jednoduchým případem Laplaceovy věty o rozvoji determinantů (říkáme, že jsme provedli rozvoj podle 1. sloupce).

V.16.2.: Cramerovo pravidlo:

Necht' je dán systém n lineárních rovnic o n neznámých. Necht' A je matice tohoto systému a $|A| \neq 0$. Pak platí:

Systém má právě 1 řešení $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde A_i je matice, která vznikne z matice A

nahrazením koeficientů u i -té neznámé sloupcem absolutních členů.

[Dk.: pro $n=1$ zřejmý

pro $n=2$ v úvodní poznámce paragrafu]

Pozn.: Cramerovo pravidlo lze užít jen tehdy, když platí:

- 1. počet rovnic = počet neznámých
- 2. $|A| \neq 0$

V opačném případě musíme použít Gaussovy eliminace.

§17. Soustavy rovnic s parametrem

Př.: Řešte v R^3 soustavu s parametrem $a \in R$: a) Gaussovou eliminací
b) Cramerovým pravidlem

§18. Lineární diofantovské rovnice

Def.: Lineární diofantovskou rovnicí s dvěma neznámými nazýváme každou rovnici tvaru $ax + by + c = 0$ $(\bullet)$, kde $a, b, c \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \neq 0$ jsou koeficienty; $x, y \in \mathbb{Z}$ neznámé. Řešením rovnice $(\bullet)$ nazýváme každou uspořádanou dvojici $[x_0; y_0]$, pro kterou platí $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Např. $4x + 2y = 1$ je diofantovská rovnice (nemá řešení, protože levá strana je vždy sudá).

V.18.1.: Necht' $a, b, c \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \neq 0$. Necht' $d = (a, b)$. Pak $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : d = at_1 + bt_2$ - Bezoutova rovnost.

V.18.2.: Věta o řešitelnosti lineární diofantovské rovnice:

Rovnice $(\bullet)$ má v $\mathbb{Z}^2$ řešení $\Leftrightarrow D(a, b) \mid c$.

[Dk.: „ $\Rightarrow$ “: Necht' $[x_0; y_0] \in \mathbb{Z}^2$ je řešení $(\bullet) \Rightarrow ax_0 + by_0 = c$. Označme $d = D(a, b) \Rightarrow d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid (ax_0 + by_0) = c \Rightarrow D(a, b) \mid c$.

„ $\Leftarrow$ “: Necht' $D(a, b) = d \mid c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : c = k \cdot d$ $\left. \begin{array}{l} D(a, b) = d \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : d = at_1 + bt_2 \end{array} \right\} \Rightarrow c = \underbrace{a}_{x_0} \underbrace{(kt_1)}_{y_0} + \underbrace{b}_{y_0} \underbrace{(kt_2)}_{y_0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow [x_0; y_0] = [kt_1; kt_2]$ je řešením $(\bullet)$.]

V.18.3.: Má-li rovnice $(\bullet)$ alespoň 1 řešení v $\mathbb{Z}^2$, pak jich má nekonečně mnoho.

[Dk.: Necht' $[x_0; y_0]$ je řešení $(\bullet) \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$.

Necht' $[x; y]$ je jiné řešení $(\bullet) \Rightarrow ax + by + c = 0$.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Označme $d = D(a, b) \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : a = dq_1; b = dq_2; D(q_1, q_2) = 1$.

Dosazení: $dq_1(x - x_0) + dq_2(y - y_0) = 0 \Rightarrow q_1(x - x_0) + q_2(y - y_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1(x - x_0) = -q_2(y - y_0) \Rightarrow q_1 \mid q_2(y - y_0) \wedge q_1 \nmid q_2 \Rightarrow q_1 \mid (y - y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : y - y_0 = rq_1 \Rightarrow y = y_0 + q_1 r$ dosazení $\Rightarrow q_1(x - x_0) =$

$= -q_2(y_0 + q_1 r - y_0) \Rightarrow q_1(x - x_0) = -q_1 q_2 r \Rightarrow x = x_0 - q_2 r$, kde $q_1 = \frac{a}{d}$;

$q_2 = \frac{b}{d} \Rightarrow$ rovnice $(\bullet)$ má nekonečně mnoho kořenů tvaru

$$\left[x_0 - \frac{br}{d}; y_0 + \frac{ar}{d} \right], \text{ kde } r \in \mathbb{Z}.]$$

Pozn.: V.18.3. neplatí pro řešitelnost rovnice $(\bullet)$ v N^2 .

Pozn.: Je-li $[x_0; y_0]$ jedno řešení $(\bullet)$, dostaneme každé další její řešení $[x; y]$ ve tvaru $x = x_0 - \frac{b}{d}r; y = y_0 + \frac{a}{d}r$, kde $r \in Z$. Lze tedy danou rovnici řešit tak, že jedno její řešení uhádneme a další získáme aplikací výše uvedených vzorců.

§19. Algebraické rovnice

Def.: Algebraickou rovnicí n -tého stupně s jednou neznámou $x \in R$ nazýváme každou rovnici tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\circ)$, kde $n \in N; a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ jsou koeficienty rovnice, $a_n \neq 0$.

Řešit rovnici $(\circ)$ znamená určit všechna čísla $x_0 \in R$ taková, pro něž platí $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0$.

Pozn.: a) Levou stranu algebraické rovnice n -tého stupně tvoří polynom n -tého stupně.
b) Lineární, resp. kvadratická rovnice je zvláštním případem rovnice $(\circ)$ pro $n=1$, resp. $n=2$.
c) V tomto paragrafu si ukážeme pouze některé speciální případy řešení rovnic $(\circ)$.

Pozn.: Hornerovo schéma:

Pomocí tohoto schématu můžeme ověřit, zda nějaké číslo je kořenem $\underline{c}$ rovnice $(\circ)$. Pro něj je hodnota polynomu $a(c)=0$. Není-li $\underline{c}$ kořenem $(\circ)$, pak platí $a(c) \neq 0$. Rozložíme polynom $a(x)$: $a(x) = (x - c) \cdot b(x) + a(c)$, kde $b(x)$ je polynom stupně $n-1$.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - c) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + a(c)$$

$$x^n : \quad a_n = b_{n-1} \quad \Rightarrow \quad b_{n-1} = a_n$$

$$x^{n-1} : \quad a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1} \quad \Rightarrow \quad b_{n-2} = a_{n-1} + c b_{n-1}$$

$$x^{n-2} : \quad a_{n-2} = b_{n-3} - c \cdot b_{n-2} \quad \Rightarrow \quad b_{n-3} = a_{n-2} + c \cdot b_{n-2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x^1 : \quad a_1 = b_0 - c \cdot b_1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = a_1 + c \cdot b_1$$

$$x^0 : \quad a_0 = a(c) - c \cdot b_0 \quad \Rightarrow \quad a(c) = a_0 + c \cdot b_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$a(c)$

Podle $a(c)$ tedy určíme, zda $\underline{c}$ je kořenem rovnice $(\circ)$.

Pozn.: a) Podobně jako kvadratická rovnice mohla mít 1 kořen dvojnásobný, algebraická rovnice n -tého stupně může mít také vícenásobné kořeny – nejvýše 1 n -násobný kořen.
b) Algebraická rovnice n -tého stupně může mít nejvýše n kořenů.

Hledání racionálních kořenů algebraické rovnice n -tého stupně s racionálními koeficienty:
(také 2.ročník, VII. kapitola, § 3.)

V.19.1.: Necht' je dána algebraická rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0; a_n \neq 0$ s celočíselnými koeficienty. Necht' $\frac{r}{s}; r \in \mathbb{Z}; s \in \mathbb{N}; D(r, s) = 1$ je kořenem této rovnice.

Pak platí: $r / a_0 \wedge s / a_n$.

[Dk.: 1. $r=0$ (kořen je 0, $s=1$): $a_0 = 0 \Rightarrow 0 / 0; 1 / a_n$

2. $r \neq 0$: kořen $x_0 = \frac{r}{s}$:

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + a_{n-2} \frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \quad / \cdot s^{n-1} \quad / \cdot r^{-1} s^n$$

$$a_n \frac{r^n}{s} + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + \dots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1} = 0$$

$$\underbrace{a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + \dots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \Rightarrow s \text{ nedělí } r \Rightarrow s \text{ nedělí } r^n \Rightarrow \underline{s/a_n}}} = - \underbrace{a_n \frac{r^n}{s}}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\left. \underbrace{a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} s + a_{n-2} r^{n-3} s^2 + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^{n-1}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \Rightarrow r \text{ nedělí } s \Rightarrow r \text{ nedělí } s^n \Rightarrow \underline{r/a_0}}} = - \underbrace{a_0 \frac{s^n}{r}}_{\in \mathbb{Z}} \right]$$

V.19.2.: Necht' $\frac{r}{s}$ je racionální kořen algebraické rovnice $(\circ)$ s celočíselnými koeficienty.

Necht' m je pevné celé číslo. Pak platí: $(r - ms) / a(m)$, kde $a(m)$ je hodnota polynomu $a(x)$ pro $x = m$.

[Dk.: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - m) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + a(m) = 0$

$$\text{kořen } x_0 = \frac{r}{s} : \left(\frac{r}{s} - m \right) \left(b_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + b_{n-2} \frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \dots + b_1 \frac{r}{s} + b_0 \right) + a(m) = 0$$

$$\frac{r - ms}{s} \left(b_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + b_{n-2} \frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \dots + b_1 \frac{r}{s} + b_0 \right) = -a(m) \quad / \cdot \frac{s^n}{r - ms}$$

1. $r = ms : a(m) = 0 \Rightarrow$ věta platí

$$2. \quad r \neq ms : \underbrace{b_{n-1} r^{n-1} + b_{n-2} r^{n-2} \cdot s + \dots + b_1 r s^{n-2} + b_0 s^{n-1}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \Rightarrow (r-ms) \text{ nedělí } s \Rightarrow (r-ms) \text{ nedělí } s^n \Rightarrow \underline{(r-ms)/a(m)}}} = - \underbrace{a(m) \cdot \frac{s^n}{r - ms}}_{\in \mathbb{Z}}$$

Pozn.: Věta se užívá pro $m = \pm 1$: $(r - s) / a(1)$
 $(r + s) / a(-1)$

§20. Reciproké rovnice

Def.: Reciprokou rovnicí n -tého stupně prvního, resp. druhého druhu nazýváme algebraickou rovnici $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0; a_n \neq 0$; pro jejíž koeficienty $a_k (k = 0; 1; \dots; n)$ platí: $a_k = a_{n-k}$, resp. $a_k = -a_{n-k}$.

- Pozn.:** a) U reciproké rovnice sudého stupně $n = 2m; m \in N$ I.druhu může být koeficient a_m libovolný, II.druhu musí být $a_m = 0$.
 b) Reciproké rovnice mají všechny kořeny různé od nuly.
 c) Má-li reciproká rovnice kořen $x = x_0$, má také kořen $x = \frac{1}{x_0}$.

Pozn.: a) Postup řešení reciproké rovnice I.druhu:

$\alpha)$ $n = 2m; m \in N$: 1. dělíme rovnici x^m

2. z dvojic koeficientů a_k, a_{n-k} vytkneme jejich společný koeficient

3. zavedeme substituci $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$;

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y; x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2; \dots$$

$\beta)$ $n = 2m + 1; m \in N$: Reciproká rovnice I.druhu stupně lichého má vždy kořen $x = -1$. Tedy po dělení výrazem $x + 1$ dostaneme reciprokou rovnici I.druhu stupně sudého.

b) Postup řešení reciproké rovnice II.druhu:

Reciproká rovnice II.druhu má vždy kořen $x = 1$. Tedy po dělení výrazem $x - 1$ dostaneme reciprokou rovnici I.druhu.